Semestre 1 | Composition de Mathématiques | Durée 04H

☞ Exercice 1 — 04 points

Questions de Cours :

1. Enoncer le théorème de la bijection.
2. Soit h une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J, h^{-1} sa bijection réciproque, $x_0 \in I$ et$y_0 \in J$ telle que $y_0 = h(x_0)$. Donner les conditions pour que h^{-1} soit dérivable en y_0 puis donner l'expression de $(h^{-1})'(y_0)$.
3. Donner les formules d'Euler et de Moivre.
4. Soit Z un nombre complexe. Donner une condition algébrique en fonction de Z et $\overline{Z}$ pour que :
   a. Z soit réel.
   b. Z soit imaginaire pur.

☞ Exercice 2 — 03,5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{U}, \vec{V})$
On donne A et B les points d'affixes respectives $z_A = -1 + 3i$ et $z_B = -2$. Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1. Factoriser $z^2 - 3iz - 2$ en remarquant que $z = i$ est une solution, puis résoudre l'équation $(E) : z^2 - 3iz - 2 = 0$. **(0,5pt)**
2. Déterminer les affixes des points invariants par f. (Un point M est invariant par f lorsque $z = z'$) **(0,5pt)**
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1. **(1pt)**
4. En posant $z = x + iy$, déterminer $Im(z')$ en fonction de x et y. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M' appartienne à l'axe des abscisses. **(1, 5pt)**

☞ Exercice 3 — 03 points

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 & = & 3 \\ U_{n+1} & = & \frac{3+U_n}{1+3U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0$ **(1 pt)**
2. Soit (W_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : W_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique et préciser sa raison. **(0,5pt)**
3. **a.** Exprimer W_n en fonction de n. En déduire la limite en $+\infty$ de W_n. **(0,25pt + 0,25 pt)**
   b. En déduire aussi U_n en fonction de n. et calculer la limite en $+\infty$ de U_n.**(0,25pt + 0,25 pt)**
   c. Déterminer $S_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ en fonction de n. **(0,5pt)**

☞ Exercice 4 — 09,5 points

PROBLEME :

Partie A : Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) & = & \frac{x^2+x}{x+2}, si x \geq 0 \\ f(x) & = & x - 1 + \sqrt{|x^2 - 1|}, si x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a.** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. **(0,25pt)**
   b. Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue. **(0,5pt)**
   c. Calculer les limites de f au bornes de son ensemble de définition. **(0,25pt+0,25pt)**
   d. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**
2. **a.** Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1. Interpréter les résultats. **(0,5pt+0,5pt+0,5pt)**
   b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. **(0,5pt)**
   c. Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. **(0,5pt+0,5pt)**
3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$. l'inéquation $x + \sqrt{|x^2 - 1|} \leqslant 0$. **(0,25pt)**
   b. En déduire que $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$. **(0,25pt)**
   c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. **(0,5pt+0,5pt)**
4. **a.** Montrer que C_f admet en $-\infty$ une asymptote parallèle à l'axe des abscisses. **(0,5pt)**
   b. Montrer que C_f admet en $+\infty$ une asymptote la droite (D) non parallèle aux axes dont on précisera son équation cartésienne. **(0,5pt)**
   c. Déterminer la position relative de C_f par rapport à (D). **(0,25pt)**
5. Construire C_f et (D). dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,75pt)**

Partie B : Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [-1; 0[$.

1. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **(0,25pt)**
2. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J. **(0,25pt)**
3. Calculer $g(-\frac{1}{2})$. En déduire $(g^{-1})'(\frac{\sqrt{3}-3}{2})$. **(0,25pt+0,5pt)**

BONNE CHANCE